Processi di generalizzazione nell'insegnamento-apprendimento dell'algebra

Nicolina A. Malara[*]

> Imparare la matematica comporta apprendere a pensare matematicamente. … L'essenza del pensiero matematico è riconoscere, apprezzare, esprimere e manipolare generalità. […] Il futuro dell'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra sta nella consapevolezza dell'insegnante dei processi di pensiero fondamentali in matematica, soprattutto in particolare della generalizzazione. (J. Mason, 1996a)

1. Aspetti teorici sulla generalizzazione

Per dare corpo e significato alla matematica come disciplina è necessario praticare un insegnamento metacognitivo. In tale insegnamento uno dei principali compiti cui l'insegnante deve assolvere è quello di portare gli studenti, di fronte allo studio delle varie situazioni affrontate, a riflettere sulla significatività dei procedimenti scelti e degli accorgimenti adottati, ad esplicitare verbalmente le strategie messe in atto, a distinguere tra ciò che è essenziale e ciò che è occasionale. Operando in tal modo gli studenti possono fissare l'attenzione sugli elementi unificanti che emergono dall'attività giungendo ad inglobare in un'unica visione un'ampia varietà di casi o situazioni, a concepire opportune rappresentazioni, così da ripercorrere, controllandone il significato, la dinamica processo-oggetto (Sfard, 1991) che governa la reificazione degli oggetti matematici.

Elementi basilari di questo tipo di insegnamento sono i processi di generalizzazione. Per 'processo di generalizzazione' intendiamo sommariamente una serie di atti di pensiero che portano un soggetto a riconoscere, esaminando casi singoli, l'occorrenza di elementi caratteristici comuni; a spostare l'attenzione dai singoli casi alla totalità dei casi possibili ed ad estendere a tale totalità i caratteri comuni individuati.

Riconoscere pattern, individuare somiglianze, collegare fatti analoghi sono atti fondativi dei processi di generalizzazione, ma elemento chiave

[*] Università di Modena e Reggio Emilia (e-mail: malara@unimore.it).

di tali processi non è tanto il riconoscimento di somiglianze tra casi quanto lo spostamento di attenzione dai casi singoli a tutti i possibili, e l'estensione ed adattamento del modello individuato ad uno qualsiasi di essi.

La generalizzazione, anche se strettamente inerente all'attività matematica è un processo naturale e pervasivo, insito nel nostro modo di 'guardare' alle cose.

Enriques, sotto lo pseudonimo di Giovannini (1942), parlando della significatività e fecondità dell'errore nella ricerca in matematica, scrive:

> Il cammino dello spirito umano è essenzialmente induttivo: cioè procede dal concreto all'astratto. Perciò la comprensione del generale è bene sempre conseguire come un grado più alto di qualcosa di più facile che sia già conosciuto, cioè come 'generalizzazione'. D'altronde, l'esempio ha una virtù chiarificatrice che ne fa un valido istrumento della ricerca scientifica e, in pari tempo, un prezioso mezzo di verificazione e di correzione delle dottrine. … Ancora più evidente è il valore euristico degli esempi, perché ognun sa che il raffronto di casi diversi in cui si palesi qualcosa di comune è atto a suggerire alla nostra mente le più belle generalizzazioni additandoci così la migliore posizione dei problemi …

E' tuttavia possibile anche generalizzare dall'esame di un solo singolo caso, quando a prescindere da suoi caratteri particolari si riesca a vederlo come elemento rappresentativo di un intero ambiente. Il caso risulta 'esemplare', nel senso di esemplificativo della totalità dei casi. Celebre al riguardo è l'aforisma di Hilbert:

> L'arte del fare matematica consiste nel trovare il caso speciale che contiene tutti i germi di generalità.

Mason (1996a, 1996b) sostiene che «la generalizzazione è il cuore pulsante della matematica» e che nell'insegnamento matematico occorra portare gli studenti alla conquista di una doppia consapevolezza: di «vedere il particolare nel generale» e di «vedere il generale attraverso il particolare». Riguardo a questo, sostiene l'importanza della esperienza di «examplehood» (esemplificazione), che porta a divenire consapevoli di come una moltitudine di particolari possa essere inglobata in una generale. Egli scrive (1996b, p. 21):

> … Una delle forme fondamentali o esperienze dello spostamento nel luogo, punto focale, o struttura di attenzione è il senso di '*examplehood*': vedere

> all'improvviso qualcosa 'puramente' come un esempio di una maggiore generalità. Fare esperienza di examplehood, in cui le cose che precedentemente erano viste disparate sono ora viste come esempi di qualcosa di più generale, produce come un effetto di cristallizzazione o condenzazione (Freudenthal, 1978[1], p. 272): ciò libera energia e riduce la quantità di attenzione richiesta per affrontare simili situazioni.

Egli sottolinea che il riconoscimento di una cosa come un esempio richiede l'aver afferrato il senso di che cosa l'esempio esemplifica, richiede la valorizzazione delle caratteristiche che lo rendono esemplare e la messa in ombra di quelle che lo rendono particolare. Sottolinea inoltre che se l'insegnante non è consapevole nel momento dell'attività di cosa rende un certo caso esemplare, non può riuscire a dare agli studenti l'adeguato supporto per cogliere l'esemplificazione insita in esso.

Radford (1996a p. 107-109) pur non negando l'efficacia della generalizzazione come mezzo didattico, in riferimento alle inferenze di fatti matematici dall'osservazione di pochi casi esemplificativi, pone il problema della validità logica degli assunti che emergono da essa[2]. Denuncia l'abuso che se ne fa nell'insegnamento, per il fatto che gli studenti acquiscono la concezione che basti verificare una 'legge' in pochi casi per asserire la sua validità in termini generali, e che pertanto occorra spendere tempo e lavoro per portarli a riconoscere i limiti della generalizzazione, a distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi, a divenire consapevoli che la validità di una proposizione desunta induttivamente si stabilisce attraverso una dimostrazione.

Va comunque rilevato che i processi di generalizzazione in matematica non riguardano solo singoli contenuti matematici ma investono anche aspetti meta legati alla organizzazione e strutturazione delle conoscenze che via via si acquisiscono.

A questo riguardo Harel e Tall (1991) riflettono sulle modalità con cui gli studenti, nell'avanzare dei loro studi, collegano conoscenze ed ampliano gli orizzonti in cui queste si collocano. Essi sottolineano come queste riorganizzazioni dipendano dal tipo di comprensione (relazionale o strumentale) che sottende la conoscenza dello studente. Essi

[1] Freudenthal, H. (1978), *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematics Education*, Reidel, Dordrecht.

[2] Radford introduce la questione facendo riferimento ad una celebre scena della 'Cantatrice calva' di Jonesco: in casa Smith suonano alla porta, Mrs Smith va ad aprire ma non trova nessuno; così al secondo e terzo squillo di campanello; al quarto squillo ella sbotta con il marito con una inferenza assurda, generalizzazione dai casi precedenti «*Non mandarmi ad aprire la porta! Hai visto che è inutile! L'esperienza ci ha mostrato che quando sentiamo il campanello questo implica che non c'è nessuno*».

distinguono tre tipi di generalizzazione che dipendono dalla costruzione mentale dell'individuo:
1) generalizzazione espansiva in cui un soggetto estende il range di applicabilità di uno schema precedente sic et simpliciter;
2) generalizzazione ricostruttiva in cui un soggetto modifica e riadatta uno schema precedente per estenderne il dominio di applicabilità;
3) generalizzazione disgiuntiva in cui nel passare da un contesto familiare ad uno nuovo il soggetto costruisce un nuovo schema che aggiunge alla lista di quelli a lui già disponibili senza alcuna rielaborazione delle conoscenze.

Essi sottolineano la maggiore facilità d'applicazione della generalizzazione espansiva rispetto a quella ricostruttiva, la maggiore delicatezza della generalizzazione ricostruttiva ma anche la sua maggiore efficacia nei tempi lunghi, la povertà cognitiva della generalizzazione disgiuntiva che, anche se sul momento può apparire funzionale, è una 'ricetta di fallimento' per gli studenti deboli, che non hanno schemi di collegamento tra le nozioni e vengono schiacciati dal loro accumulo.

Dörfler (1989, 1991) è interessato alle modalità di costruzione della conoscenza negli studenti e teorizza sul processo di generalizzazione. Egli vede la generalizzazione come una combinazione di processi cognitivi ad un doppio livello: il livello psicologico individuale*,* collegato alla dimensione personale (del pensiero e della riflessione autonomi); quello epistemologico-oggettivo, collegato alla dimensione sociale (della condivisione, della comunicazione e dell'uso del linguaggio). Egli considera la conoscenza come il risultato della strutturazione e della organizzazione della propria esperienza e la vede come sostenuta da appropriate azioni su dati oggetti attraverso una riflessione sia sulle azioni sia sulle trasformazioni prodotte negli oggetti. Per il consolidamento della conoscenza egli considera cruciale la rappresentazione di un processo «attraverso l'uso di oggetti percepibili, come segni scritti, di elementi caratteristici e stage, di passi e risultati delle azioni». In questo modo si genera un protocollo di azioni che permette una cognitiva recostruzione e concettualizzazione del processo stesso.

Su queste premesse egli sviluppa un «modello per i processi di astrazione e generalizzazione» (Dörfler 1991). Questo modello ha le sue radici nella 'astrazione riflessiva' di Piaget, un processo dove le azioni sono viste come sorgente genetica dei concetti (anche matematici). Dörfler però amplia il significato di azione di Piaget includendo anche le azioni simboliche. Nel suo modello si possono distinguere due fasi: la prima conduce all'emergere di invarianti e alla nascita di una prima loro rappresentazione; la seconda, più significativa dal punto di vista matematico, riguarda le rappresentazioni stesse: è attraverso una riflessione su di esse che il modo di vederle si evolve fino a portare alla reificazione di nuovi concetti matematici.

Più in dettaglio, il punto di partenza del modello di Dörfler è un'azione o un sistema di azioni (che sono materiali, immaginate o simboliche, ma sempre intese come concrete) su certi oggetti, materiali o mentali: In queste azioni l'attenzione è diretta verso alcune relazioni o connessioni tra elementi di azioni. In molti casi le azioni combinano gli elementi originali in un modo che, ripetendole a piacere, tali relazioni si rivelano stabili, quando ciò accade queste combinazioni o trasformazioni di base emergono come 'invarianti di azioni' che vengono a definire uno 'schema'. Dörfler sottolinea che «l'emergere degli invarianti necessita di una certa simbolica descrizione». Questo è un punto chiave del modello. Vengono usati simboli per rappresentare elementi di azioni o per quantità rilevanti per loro, per trasformazioni su o combinazioni degli oggetti indotte dalle azioni. Questa rappresentazione degli invarianti può includere elementi variabili relativi ad oggetti su cui sono condotte le azioni. I simboli (di natura verbale, iconica, geometrica o algebrica) inizialmente hanno un ruolo puramente descrittivo: rappresentano azioni o trasformazioni. Questa prima fase è vista come momento di astrazione costruttiva: gli elementi originali sono sostituiti da prototipi, che evidenziano meglio proprietà o relazioni su cui si concentra l'attenzione (essi guadagnano significato ed 'esistenza' via le azioni). La seconda fase si sviluppa attraverso due importanti momenti:

- un momento di generalizzazione estensionale, quando l'uso di prototipi conduce a determinare il dominio di variabilità dei pattern, cosa che promuove l'interscambiabilità degli oggetti rispetto alle azioni su di essi. A questo punto i simboli perdono il loro iniziale significato di generici rappresentanti ed acquisiscono quello di variabili con proprietà di sostituzione.
- un momento di generalizzazione intensionale, quando attraverso la riflessione sulle rappresentazioni simboliche degli invarianti, i simboli usati perdono il loro significato di rappresentanti (di elementi variabili delle azioni) e diventano elementi delle azioni stesse e 'portatori' degli invarianti: a questo punto i simboli si distaccano dal loro range di riferimento, e acquistano un significato nuovo, intrinsecamente connesso agli invarianti: nasce un oggetto matematico nuovo, dove i simboli sono ora variabili con il carattere di oggetti.

Dörfler sostiene che una volta che una tale generalità viene costruita essa diviene a sua volta base per ulteriori generalizzazioni estensionali. Egli sottolinea che il suo modello di 'generalizzazione teorica' si contrappone a quello aristotelico di 'generalizzazione empirica', ossia il processo di base che, grazie alla percezione dei sensi, porta alla individuazione di una qualità comune o di una proprietà tra oggetti diversi o situazioni. Egli afferma che la generalizzazione empirica non contribuisce alla costruzione del significato dei concetti perché è principalmente un processo di riconoscimento, ne critica l'uso nell'insegnamento della matematica e sottolinea il fatto che nell' insegnamento un tale riconoscimento viene usualmente postulato[3].

Dörfler dà una interessante serie di esempi del suo modello sia elementari che di matematica avanzata. In questi esempi tuttavia egli rivolge l'attenzione unicamente ai contenuti matematici, senza fare riferimenti né agli studenti né all'insegnante; volutamente lascia aperto il problema di quali siano le situazioni iniziali più motivanti per gli studenti e più appropriate a dar loro consapevolezza di tali processi e rimanda all'insegnante la scelta di tali situazioni poiché - egli scrive - «è solo l'insegnante che conosce gli studenti ed i loro interessi».

Più tardi Hejny (2003) propone un modello di costruzione e strutturazione della conoscenza articolato in sei stages (vedi tavola sotto) dove la generalizzazione è considerata elemento basilare ma ad un livello precedente rispetto alla astrazione e funzionale ad essa per la strutturazione della conoscenza. Hejny, tra l'altro, riferendosi a quanto espresso da Sierpinska[4] circa lo sviluppo della comprensione matematica, considera riduttiva la visione della studiosa, che vede la generalizzazione come elemento centrale in tale comprensione. Egli si dichiara d'accordo con lei a patto di affiancare l'astrazione alla generalizzazione[5]. Elemento di originalità nel modello di Hejny consiste nel considerare come primo passo del processo la 'motivazione al conoscere' dello studente.

[3] A questo riguardo considera il concetto di derivata e gli 'esempi', quali velocità, pendenza, densità, che sono usualmente usati per mostrare la derivata come loro struttura comune ma sottolinea che tale struttura non viene sviluppata dagli studenti stessi.

[4] Sierpinska, A. 1994, *Understanding in mathematics*, London & NewYork: The Falmer press

[5] Hejny (2003) scrive: «Nella sua analisi dell'atto di comprendere, Sierpinska considera quattro operazioni mentali di base: identificazione, discriminazione, generalizzazione e sintesi. 'Tutte e quattro le operazioni sono importanti in un processo di comprensione. Ma nella comprensione matematica, la generalizzazione ha un particolare ruolo da giocare. Non è la matematica, soprattutto, un'arte di generalizzazione? *L'art de donner le même nom à des choses différentes*, come usa dire Poincare?' Sierpinska (1994, p. 59). Noi siamo d'accordo su questa asserzione purché il '*donner*' comprenda entrambi i termini generalizzazione ed astrazione».

(p.p. 13-36) ISSN: 2038-1034

Gli stage di sviluppo e strutturazione della conoscenza nel modello di Hejny

1. Motivazione. Per motivazione intendiamo una tensione, che appare nella mente di uno studente come una conseguenza della contrapposizione tra 'Io non so' e 'mi piacerebbe sapere'. Questa tensione dirige l'interesse degli studenti verso un particolare problema matematico, situazione, idea, concetto, fatto, schema, …
2. Stage di modelli mentali isolati. Acquisizione di un insieme iniziale di esperienze. All'origine queste esperienze sono incamerate come eventi isolati o immagini. Più tardi, ci si potrebbe aspettare che intervenga un qualche legame tra loro.
3. Stage di generalizzazione. I modelli isolati ottenuti aono mutuamente confrontati, organizzati e posti in gerarchie per creare una struttura. Tra i modelli appare la possibilità di un transfert e avviene la scoperta di uno schema che li generalizza. Il processo di generalizzazione non cambia il livello di astrazione del pensiero.
4. Stage del(i) modello(i) mentale universale(i). Si sviluppa una sintesi generale dei modelli isolati preesistenti. Essa dà una prima visione nella comunità dei modelli. Allo stesso tempo, è uno strumento per affrontare modelli nuovi e più impegnativi. Se lo stage 2 è di collezionare nuove esperienze, gli stage 3 e 4 portano ad organizzarli in una struttura. Il ruolo di un tale schema generalizzante è frequentemente giocato da uno dei modelli isolati.
5. Stage di astrazione. Vi è la costruzione di un nuovo concetto più profondo e più astratto, di un processo o schema, che porta una nuova visione in quella parte di conoscenza.
6. Stage della conoscenza astratta. Il nuovo pezzo di conoscenza si colloca nella rete cognitiva preesistente dando luogo a nuove connessioni. A volte porta alla riorganizzazione della struttura matematica o di una parte di essa.

Confrontando il modello di Hejny con quello di Dörfler, rileviamo una prima importante differenza: Dörfler non esprime una distinzione tra generalizzazione ed astrazione, anzi nella descrizione dei processi di generalizzazione considera l'attuarsi di momenti di astrazione, al contrario Hejny rimarca una priorità della astrazione rispetto alla generalizzazione. Una seconda differenza riguarda il ruolo della rappresentazione. Nel modello di Hejny la rappresentazione non appare esplicitamente, per Dörfler invece è essenziale in quanto è proprio il ruolo giocato dai simboli nella rappresentazione degli invarianti e il mutamento progressivo dei significati che si associano ad essi che consente la reificazione degli oggetti matematici. Un altro elemento collaterale di differenza riguarda il carattere degli esempi offerti a supporto del modello. Mentre Dörfler presenta esempi focalizzati sul contenuto matematico senza riferimento ai soggetti coinvolti nel processo, Hejny mostra analiticamente lo svolgersi del processo di costruzione della conoscenza attraverso estratti di attività dei ragazzi che testimoniano i momenti di generazione di generalizzazioni e di astrazioni.

In questo senso, rifacendoci alla classificazione di Sfard (2005) sui periodi temporali che segnano l'evoluzione della ricerca in Educazione Matematica, mentro lo studio di Dörfler si colloca nella 'content's era' quello di Hejny si colloca in pieno nella student's era.

In riferimento agli studenti, un vasto ed interessante studio è dovuto ad Ellis (2007), insegnante-ricercatrice. Oggetto dello studio è l'identificazione dei comportamenti chiave degli studenti nella generazione di generalizzazioni. Ellis esamina studi in educazione matematica dai quali emergono tre categorie di azioni tipiche della generalizzazione: (a) lo sviluppo di una legge che enuncia relazioni o proprietà; (b) l'estensione o l'espansione di un tipo di ragionamento oltre il caso o i casi considerati, (c) l'identificazione di elementi comuni attraverso i casi.

Tassonomia degli atti di pensiero degli studenti nella produzione di generalizzazioni (Ellis 2007)

Azioni di generalizzazione

1) collegare (oggetti o situazioni);
2) ricercare (una stessa relazione, una stessa procedura, uno stesso pattern, uno stesso risultato);
3) estendere (l'allargare il range di applicabilità di un fenomeno per induzione da alcuni casi, il rimuovere casi particolari legati al contesto per sviluppare un modello generale, l'operare su un oggetto al fine di generare nuovi casi, il riapplicare pattern esistenti per generare nuovi casi).

Formulazioni di generalizzazione

1. identificazione o affermazione 1.1) l'esplicitazione del riconoscimento di un fenomeno che continua (identificazione di una proprietà dinamica al di là di una singola occorrenza)
1.2) riconoscimento di una somiglianza (identificazione di una proprietà comune ad oggetti o situazioni, l'identificazione di oggetti o situazioni come simili o identici);
1.3) formulazione di un di principio generale (la descrizione di una formula generale o di un fatto, l'identificazione di un pattern generale; la descrizione di un metodo o strategia che si estende al di là di un caso specifico;

(p.p. 13-36) ISSN: 2038-1034

l'affermazione di una legge globale o del significato di un oggetto o un'idea).
2. Definizione di una classe di oggetti che soddisfano ad una data relazione, pattern o altro fenomeno.
3. Influenza 3.1 di una idea strategia nota (implementazione di una precedente generalizzazione); 3.2. di una idea strategia modificata (adattamento di una generalizzazione precedente ad un nuovo porblema o situazione).

Lamenta tuttavia che tali studi sono rivolti alla evidenziazione delle modalità di pensiero degli studenti in relazione alla produzione di una legge predeterminata dai ricercatori, e che di conseguenza questi trascurano di considerare possibili generalizzazioni parziali o non aderenti a ciò che essi si aspettano. Ella si pone in una prospettiva più ampia e considera accanto ai processi di generalizzazione classici, gli «actor-oriented transfer» ossia processi attraverso i quali gli studenti in autonomia trasferiscono e adattano loro conoscenze in nuovi contesti operando sotto nuove condizioni.

La studiosa esplora come gli studenti estendono i loro ragionamenti, esamina il senso che gli studenti attribuiscono alle proprie affermazioni generali, indaga circa quali tipi di caratteri comuni gli studenti potrebbero percepire attraverso i casi. L'ampia gamma di dati raccolti, relativi a protocolli degli studenti su problemi di vari natura, da successive interviste, dalle video trascrizioni dei processi di classe, le consente di mettere a punto, una tassonomia su due macro livelli: quello delle «azioni di generalizzazione» e quello delle conseguenti «generalizzazioni di riflessione», ossia le formulazioni generali prodotte. Sostiene che attraverso l'esame di quali azioni di generalizzazione promuovono particolari generalizzazioni di riflessione, la tassonomia permette di studiare i processi attraverso i quali gli studenti giungono a generalizzare, cominciando dai primi atti di pensiero fino alla fomulazione delle proposizioni di generalizzazione. Una tabella riassuntiva della tassonomia è sopra riportata.

Diversi altri studi riguardano i processi di generalizzazione in algebra di cui riferiamo qui di seguito.

2. Generalizzazione ed insegnamento dell'algebra

In un insegnamento dell'algebra che dia spazio ad attività generazionali e di tipo meta nel senso di Kieran (1996) i processi di generalizzazione sono dominanti. In ambito internazionale sono pochi gli studi implicanti processi di generalizzazione a livello avanzato, essi riguardano comportamenti di studenti di scuola secondaria o futuri insegnanti coinvolti in attività non standard di problem solving (Papadopulos e Iatridou, 2010; Zazkis e Liljedal, 2002). La maggioranza degli studi riguardano processi di generalizzazione in attività generazionali e si intrecciano con l'introduzione delle lettere per la codifica in termini generali di regolarità osservate. Kaput (1995) scrive:

> sia i mezzi sia l'obiettivo del generalizzare sono rivolti a stabilire alcuni ogetti simbolici formali che sono da intendersi come rappresentazioni di ciò che si è generalizzato per rendere ciò che è stato generalizzato soggetto di ragionamento ulteriore […] atti di generalizzazione e graduale formalizzazione della generalità costruita devono precedere il lavoro formale - altrimenti il formalismo non si radica nella esperienza dello studente.

Kaput può essere considerato una dei padri dell'early algebra, area disciplinare oggi consolidata, che propone un uso precoce delle lettere intrecciato ad un insegnamento relazionale dell'aritmetica ed una valorizzazione del linguaggio algebrico come strumento di rappresentazione di relazioni e proprietà, di ragionamento e giustificazione. I suoi studi hanno dato origine ad interessanti sperimentazioni in US che hanno investito sia il curricolo, avvicinando gli studenti alla generalizzazione di fatti, procedure e ragionamenti, sia la formazione insegnanti (Kaput e Blanton, 2001; Blanton e Kaput, 2001; Carpenter e Levi, 2001; Carpenter e Al., 2003; Carraher e Al., 2000, 2001; Schliemann e Al., 2001). Le influenze di tali studi si ritrovano nelle proposte della NCTM per il curricolo, dove viene data una forte enfasi all'attività di generalizzazione di pattern.

Al riguardo anticipatori ed ormai classici sono gli studi di Stacey (1989), Lee (1996), Orton e Orton (1994, 1996) ed i libri di Mason e Al. (1985) e di Orton (1999).

In generale gli studi a livello internazionale di approccio all'algebra che investono i processi di generalizzazione riguardano oltre che lo studio di pattern, la rappresentazione di corrispondenze funzionali tra coppie di variabili, lo studio di equazioni, aspetti strutturali delle operazioni aritmetiche, la formulazione di congetture e la loro giustificazione. Tuttavia le attività di esplorazione di pattern è quella più praticata, come è anche documentato dal numero speciale della rivista ZDM *From Patterns to generalization: development of algebraic thinking* (2008).

(p.p. 13-36) ISSN: 2038-1034

Dörfler nel suo commento agli articoli presenti in questo numero speciale, fa alcune osservazioni su cui concordiamo (Dörfler 2008). Innanzi tutto, egli sostiene che la conoscenza ed il controllo delle notazioni algebriche non si sviluppa semplicemente attraverso la generalizzazione di pattern. In particolare, egli osserva che per promuovere la generalità non è sufficiente che gli allievi siano capaci di tradurre espressioni dal registro verbale a quello algebrico ma occorre che essi riescano a cogliere il senso delle espressioni formali; egli sottolinea l'importanza della «negoziazione dei significati dei termini algebrici e soprattutto della generalità insita in loro», perché è «l'abitudine all'uso, all'operare con, al parlare di, etc, i segni/le lettere sulla carta» che rende gli studenti consapevoli dei significati di cui questi sono portatori. Circa le successioni figurali egli evidenzia l'importanza che gli studenti divengano consapevoli che una data raffigurazione può essere vista in modi differenti e che di conseguenza è opportuno che se ne cerchino interpretazioni differenti. Inoltre sia per dare spazio alla inventiva degli studenti sia per non determinare in loro lo stereotipo della esistenza di una 'unica legge', data una serie di figure, suggerisce di chiedere «come puoi continuare?» o «che cosa puoi cambiare nelle figure date?»

Analogamente, circa le attività di modellizzazione di relazioni funzionali egli afferma che «generalizzazioni verbali o generalizzazioni via quasi-variabili[6] non permettono con facilità di pensare a proprietà di cui le relazioni funzionali godono. Essi descrivono la rispettiva generalità ma non consentono di operare in essa o con essa». Egli sottolinea anche che ciò che rende produttivo l'uso delle lettere è quello di permettere di trasferire in calcolo ragionamenti sui fatti in tavola, operando con le lettere secondo le comuni leggi dell'aritmetica (condensate nelle nozioni di anello o di campo); ancora, rileva che se gli studenti non sono consapevoli delle possibilità di azioni sulle lettere come «aggiungere» o «moltiplicare», l'espressione «n sta per un numero qualsiasi» remane vuota e difficile da accettare. Inoltre egli afferma che i lavori presentati nel numero dello ZDM in questione non chiariscono la relazione tra questo genere di attività e la padronanza nel calcolo algebrico, che necessariamente lo studente ha bisogno di praticare per poter giungere a sviluppare ragionamenti e produrre dimostrazioni attraverso il linguaggio algebrico. Infine, egli sottolinea che molti lavori sono focalizzati solo sulle difficoltà incontrate dagli studenti ma che questo è riduttivo poiché

[6] Questo costrutto, su cui torneremo più avanti, si riferisce alla individuazione di una generalità attraverso l'interpretazione di specifiche occorrenze numeriche in termini di variabilità.

cognizione e comportamenti degli studenti possono essere influenzati da metodi dell'insegnante e modi di porre i problemi.

Riguardo alla letteratura, per questioni di spazio, ci limitiamo qui a considerare alcuni studi tra i più ampi e consolidati, quali quelli di Cooper e Warren, di Rivera e Rossi Becker e soprattutto di Radford. Prima di affrontarli tuttavia ci piace ricordare un singolare studio sulla generalizzazione e formalizzazione di procedimenti risolutivi di problemi aritmetici (Ferrari, 2006) in cui bambini di scuola elementare vengono guidati ad operare la distinzione tra dati e valori numerici dei dati e vengono posti di fronte al compito di esprimere in termini generali la procedura risolutiva di un problema. In questo processo le lettere vengono adottate dagli allievi come nomi contratti di una quantità volutamente non precisata dei dati per esaltare l'espressione delle relazioni aritmetiche tra essi; le singole scritture vengono da loro composte secondo gli atti operatori necessari alla risoluzione del problema giungendo a rappresentare la procedura risolutiva in una espressione algebrica. I risultati mostrano non solo l'efficacia dell'approccio ma anche un forte coinvolgimento degli allievi che genera motivazione allo studio della disciplina.

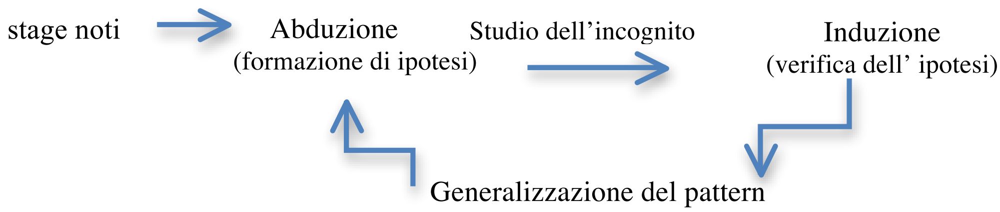
2.1 Gli studi di Cooper e Warren

Gli studi di Cooper e Warren (Warren e Cooper 2008, Cooper e Warren 2011) riguardano lo sviluppo di un progetto (Early Algebra Teaching Project) finalizzato alla collocazione di attività in early algebra nei programmi del Queesland (Australia). Gli autori considerano tre principali temi: a) pattern e funzioni; b) equivalenze ed equazioni; c) generalizzazioni aritmetiche. Essi, in linea con Radford (come vedremo più avanti), non vedono l'algebra come la manipolazione di lettere ma piuttosto come un sistema caratterizzato da: indeterminazione degli oggetti, natura analitica del pensiero; modi simbolici di designare gli oggetti. Il loro obiettivo è lo sviluppo dei modelli mentali degli studenti basato su relazioni tratte situazioni del mondo reale, simboli, linguaggio, evoluzione di fenomeni e grafici, in particolare di quelli che permettono la modellizzazione di situazioni reali in cui intervengono dati incogniti o variabili. Nel progetto EATP essi hanno studiato atti di generalizzazione degli studenti in relazione alla individuazione di: leggi soggiacenti a pattern (successioni figurali), leggi di cambiamento e loro inverse attraverso l'uso di macchine numeriche e tabelle di dati numerici, principi di equivalenza (emergenti dall'uso della bilancia) ed equazioni, principi di compensazione nei calcoli, rappresentazione di un cambiamento mediante tabelle, diagrammi a frecce, grafici, relazioni ed equazioni, guardando con particolare attenzione al collegamento tra uso di rappresentazioni e sviluppo del pensiero algebrico. Questi studi hanno rinforzato la loro convinzione che la generalizzazione è quella che maggiormente determina lo sviluppo del pensiero algebrico e la preparazione per gli studi successivi (Cooper e Warren, 2011, p. 188-190). Questi autori, in analogia con la nozione di 'quasi variable' (Fuji e Stephens, 2001) - che esprime il riconoscimento degli studenti che una o più espressioni numeriche possono evidenziare una relazione matematica soggiacente - introducono la quasi-generalizzazione nozione che indica 'un passo molto vicino verso la piena generalizzazione', ossia lo stato in cui gli studenti riconoscono ed esprimono la generalizzazione mediante numeri specifici, sono in grado di applicarla a molti altri numeri, ed anche estenderla ad un 'numero imprecisato', prima che essi possano esprimerla pienamente in linguaggio naturale o nel codice algebrico. I loro risultati mostrano che la 'quasi-generalizzazione' risulta un passo propedeutico alla formulazione in termini verbali o simbolici di una generalità (Cooper e Warren, 2011, p. 193).

Dal punto di vista delle attività di classe e degli studenti questi studi sono in linea con i nostri (Cusi e Malara, 2008; Cusi, Malara e Navarra, 2011), ma noi prendiamo in considerazione anche il ruolo dell'insegnante nella classe e, cosa più complessa, affrontiamo la questione di come sviluppare le competenze degli insegnanti nel condurre gli studenti ad affrontare questo tipo di questioni.

2.2. Gli studi di Rivera e Rossi Becker

Gli studi di Rivera (2010) e Rivera & Rossi Becker (2007, 2008, 2011) sono rivolti alla messa a fuoco dei processi mentali attuati da studenti di scuola media nel cogliere ed esprimere leggi lineari, in qualche caso quadratiche, generate dall'analisi delle prime occorrenze (o stage) di pattern non elementari. Gli autori sono interessati ai processi di costruzione e giustificazione delle generalizzazioni da parte degli studenti. Essi focalizzano la loro attenzione sulla 'percezione visiva' come risultante sia della percezione sensoriale che della 'percezione cognitiva', quest'ultima intesa come la capacità di un individuo di riconoscere un fatto o una proprietà in relazione ad un oggetto. Sostengono, come Radford, che i processi di esplorazione di un pattern sono di tipo abuttivo-induttivo, ma (come vedremo più avanti) a differenza di Radford, inglobano nel loro modello i processi per tentativi, ammettendo che cicli di abduzione-induzione possano ripetersi per raffinare ipotesi iniziali fino alla definizione di una legge adeguata alla generalizzazione. Modellizzano questo processo nel triangolo sottoindicato



In particolare Rivera (2010) studia in modo molto analitico l'evoluzione delle visualizzazioni cognitive degli studenti che stanno alla base delle modellizzazioni algebriche prodotte. In riferimento a questo egli si riferisce a: Giaquinto (2007) il quale sostiene che il riconoscimento della struttura di un pattern nasce delle associazioni dovute al 'poter visivo' naturale di ciascuno e dell'uso di un 'template (modello) visivo o percettibile' che indirizza le esplorazioni per il riconoscimento di parti costanti o ridondanti di un pattern; Davis (1993) che vede l''occhio' come 'organo legittimo di scoperta e di inferenza' e che considera la scoperta non solo frutto di ragionamento logico ma anche di osservazione; Arcavi (2003) che considera un prototipo visivo (template) come una strategia che permette agli studenti di vedere il non visto e l'astratto, che è dominato da relazioni e strutture concettuali non sempre evidenti; Metzger (2006) per la «legge di buona gestalt» riguardante l'abilità di percepire, distinguere ed organizzare una figura. Rivera usa l'espressione «pattern di alta (o bassa) gestalt» per esprimere il grado di efficacia di un pattern nell'evidenziare la struttura di una sequenza. Egli mostra l'esistenza ed efficacia di 'template' visivi nello studiare pattern che hanno una struttura lineare o quadratica ma sostiene che sono necessarie ulteriori ricerche per accertarsi della possibilità di template visivi per pattern che non hanno una struttura lineare[7].

[7] Rivera realizza anche un raffinamento del modello precedente considerando il triangolo <abduzione, induzione, generalizzazione> come base comune di due opposti tetraedri, dove il vertice in alto di un tetraedro rappresenta 'l'effetto gestalt' ed il vertice in basso del tetraedro opposto 'l'effetto conoscenza/azione'. Egli pone poi la questione di ricerca di come questo nuovo modello possa essere usato per altri compiti di carattere algebrico coinvolgenti la generalizzazione.

(p.p. 13-36) ISSN: 2038-1034

In Rivera e Rossi Becker (2011) gli studiosi classificano le procedure attivate dagli allievi per giungere alla rappresentazione algebrica di una successione nelle tre seguenti categorie: 1) *generalizzazioni costruttive standard* (CSGs); 2) *generalizzazioni costruttive non standard* (CNG); 3) *generalizzazioni decostruttive* (DGs). Le *generalizzazioni costruttive* si riferiscono a quelle formule polinomiali che gli studenti construiscono direttamente dall'analisi degli stage noti del pattern come risultato di una percezione cognitiva della loro struttura vista costituita nel suo insieme da parti non sovrapposte. La generalizzazione decostruttiva invece si riferisce a quelle formule polinomiali che gli studenti costruiscono dall'analisi degli stage noti del pattern come risultato di una percezione cognitiva delle figure che le mostra strutturalmente costituite da parti sovrapposte (in alcuni casi ciò avviene vedendo il pattern come parte di una più ampia configurazione ma ben nota e facile). I modi decostruttivi di vedere un pattern implicano che alcuni elementi (lati o vertici) di una figura possono essere contati due o più volte e perciò le corrispondenti formule nascono da un processo combinato di 'addizione e sottrazione', in quanto gli elementi sovrapposti devono essere sottratti dal totale. I termini «standard» e «non standard» si riferiscono alle espressioni algebriche della legge: se viene applicata rispettivamente già semplificata oppure no. Dagli studi in esame le CSGs appaiono essere dominanti rispetto alle DGs. Gli autori, anche se identificano nel lavoro degli studenti gli stage 'fattuale', 'contestuale' e 'simbolico' di Radford (si veda più avanti), focalizzano la loro analisi sull'evoluzione del lavoro degli studenti dalla (de)costruzione guidata dalle figure a quella guidata dai numeri. Essi documentano quattro tipi di giustificazione a supporto della formula prodotta: generazione per estensione; uso dell'esempio generico; proiezione della formula; formula che contrasta l'apparenza. Essi collegano il successo degli studenti con la mediazione socio-culturale della classe cosa che permette loro di affrontare il pensiero moltiplicativo e, in alcuni casi, di semplificare le loro giustificazioni.

Da questi risultati quello che appare incomprensibile è la difficoltà degli studenti di produrre generalizzazioni costruttive non standard, dal momento che queste riflettono fedelmente le visioni cognitive degli studenti esse dovrebbero precedere quelle standard. Probabilmente il comportamento rilevato negli studenti dipende dal particolare tipo di contratto didattico in uso in quelle classi.

2.3. Gli studi di Radford

Radford sviluppa una serie di studi molti raffinati (Radford, 2003, 2006, 2008, 2009, 2010, 2011) dove sono analizzati e teorizzati i modi con cui ragazzi di 12-14 anni, immersi in un ambiente d'insegnamento socio-costruttivo, generalizzano pattern di tipo lineare. Noi richiamiamo qui alcuni punti chiave della teoria di Radford.

L'autore afferma che la generalizzazione implica due principali processi che coinvolgono aspetti fenomenologici e semiotici: catturare una generalità, un atto fenomenologico che si realizza attraverso l'osservazione di come caratteristiche comuni locali valgono attraverso i termini dati[8]; ed esprimere una generalità, un atto semiotico che si realizza attraverso gesti, linguaggio verbale e simboli algebrici.

Il 'cogliere' (grasping) è visto come l'attivazione di una abduzione dall'osservazione di alcuni casi, ossia l'individuazione di una comunanza intesa in senso Peirceano di 'predizione generale'. L'abduzione diviene un'ipotesi attraverso cui, se positivamente verificata, emerge un nuovo oggetto: il *genus*, cioè un concetto generale, che sorge per generalizzazione, e che estende la comunanza osservata a tutti i termini della sequenza. Avviene una generalizzazione algebrica quando il genus si cristallizza in uno schema, cioè una legge che rappresenta con una espressione un qualunque termine della sequenza.

Casi particolari
$P_1, p_2, \ldots, p_k$

abduzione → Trasformazione dell'abduzione → Deduzione di p_n da C

Più tardi egli sostiene che «l'identificazione del genus non può essere considerato il risultato di un processo algebrico» (Radford, 2011). Egli afferma che lo sviluppo del pensiero avviene sia sul piano mentale che su quello sociale, generato da componenti materiali (gesti, linguaggio, percezione) e immateriali (immaginazione, discorso interiore…), che tutte insieme constituiscono la sua 'tessitura semiotica'. Considera che il

[8] Dorfler (2008) riflette criticamente su una concezione del 'catturare una generalità' che sia basata unicamente su una comprensione empirica. Come esempio egli consiera la nozione di cerchio e sottolinea che essa non aderisce con questa visione perché «niente di osservabile ha (esattamente) la forma di un cerchio … e che in molte situazioni la generalizzazione empirica o le astrazioni necessitano il supporto complementare di processi epistemici quali idealizzazione e ipostatizzazione».

(p.p. 13-36) ISSN: 2038-1034

pensiero algebrico è caratterizzato da indeterminatezza e analiticità che può essere riconosciuta dai segni che lo studente traccia. Rispetto all'emergere del pensiero algebrico egli afferma che: a) esprimere la generalità algebricamente non implica necessariamente l'uso delle lettere (esse possono essere usate senza alcun significato generale) ma dal modo di ragionare che si esplica nel cogliere ed esprimere in qualche modo l'indeterminatezza. b) l'emergere del pensiero algebrico avviene quando lo studente riesce a spotare l'attenzione dal calcolare il numero di certi elementi al «modo di calcolare» tale numero.

Dall'esame dei comportamenti degli studenti, distingue tre livelli di approccio alla generalità. Un primo livello, che egli definisce 'induzione ingenua', dove non vi è effettiva, consapevole generalizzazione. Esso si caratterizza dal procedere degli allievi per tentativi ed errori, dalla occasionalità di eventuali scoperte di generalità, da prime abduzioni che vengono falsificate nella verifica. A questo livello si può anche arrivare ad esprimere una legge nel sistema alfanumerico ma la generalizzazione non è algebrica. Un secondo livello, in cui la generalizzazione viene vista localmente, in modo ricorsivo, e viene espressa nei vari casi attraverso aggiunzione di un termine costante, che chiama di 'generalizzazione aritmetica'. Un terzo livello, molto intrigato e complesso, segnato da varie fasi via via più evolute, che definisce di 'generalizzazione algebrica'. Circa questo ultimo livello l'autore parla di un area di lavoro che chiama zona dell'emergere della generalizzazione algebrica che si sviluppa mediante strati di generalità. Il primo strato, definito 'fattuale', è quello dove la generalizzazione si manifesta attraverso concrete azioni sui casi in esame ma non si coagula in un enunciato. Il secondo strato, definito contestuale, è raggiunto quando l'indeterminazione entra nel discorso, si arriva a parlare di 'numero di una figura' ma si ragiona facendo riferimenti spazio-temporali su di essa in una prospettiva generale e una legge viene espressa in vario modo ricorrendo a parole, gesti, ritmi, segni. Il livello di generalizzazione algebrica si raggiunge quando avviene che ci si distacca dal contesto figurale e si attua uno spostamento verso le relazioni tra elementi costanti e variabili (numeri e lettere). Elementi importanti che intervengono in questo ultimo processo sono l'iconicità, ossia il rilevamento tratti simili in procedure precedenti, lo spostamento da un particolare e non specificato numero al livello di variabile per sintetizzazione di tutte le esperienze matematiche locali, la contrazione di espressioni che testimonia un più profondo livello di consapevolezza.

Questa una rappresentazione di sintesi dei processi indicati (Radford, 2006, p.15)

Modello di Radford relativo ai processi attivati dagli studenti nell'affrontare lo studio di pattern

Induzione ingenua	**Generalizzazione**			
Formulazione di congetture	Aritmetica	Algebrica		
(Tentativi ed errori)	(ricorsività locale)	Fattuale	Contestuale	Simbolica

Nei lavori più recenti Radford (2010, 2011) indirizza la sua attenzione verso allievi molto giovani (7-8 anni) e studia in dettaglio la relazione insegnante-allievi in un processo di classe dove gli allievi sono portati ad individuare ed esprimere generalizzazioni nell'esplorazione di sequenze figurali. In (Radford, 2010) lo studioso afferma che «l'apprendimento può essere teorizzato come quel processo attraverso il quale gli studenti gradualmente acquisiscono familiarità e iniziano ad avere consapevolezza dei significati culturali e delle forme di ragionamento e di azione che si sono costituiti». In particolare egli si focalizza sul «modo di vedere» e afferma che «gli occhi dei matematici sono stati soggetti ad un lento processo di addomesticazione» nel corso del quale gli uomini hanno imparato a vedere e riconoscere cose secondo modalità culturali «efficienti».

Radford considera il «vedere» non un semplice atto fisiologico ma un frutto del contesto culturale in cui si è immersi; egli sottolinea che la «generalizzazione si basa sull'individuare somiglianze tra cose differenti ed anche differenze tra cose somiglianti», e che questo gioco di visioni deve essere convenientemente educato dall'insegnante. Egli evidenzia il carattere sociale dei processi di insegnamento-apprendimento, il ruolo assunto dell'insegnante in esso e si concentra su «il modo in cui gli insegnanti creano le possibilità per gli studenti di percepire le cose in un certo modo e di avvicinarsi ad un modo culturale di generalizzare»; egli afferma che «percepire le successioni in un certo modo culturalmente efficiente coinvolge una transformazione dell'occhio in un sofisticato organo teorico».

Nell'analisi delle trascrizioni di classe egli evidenzia i comportamenti dell'insegnante (domande, riflessioni guidate, gesti, toni di voce, silenzi, sguardi) attraverso i quali ella riesce ad indirizzare i suoi piccoli allievi a

(p.p. 13-36) ISSN: 2038-1034

rendersi conto da sé stessi della impropriietà di certe loro visioni e ad autocorreggersi. Rispettto a questo egli scrive:

> …Poēsis è un momento creativo di rivelazione – l'evento della cosa in consapevolezza… il momento poetico di rivelare la struttura generale della successione discussa in questo lavoro era il risultato di una interazione congiunta allievo-insegnante. Questo momento - l'evento della cosa in consapevolezza – era molto più che una negoziazione di significati e di scambio. Era piuttosto una fusione di voci, gesti, percezioni e prospettive nel senso di Bactiniana eteroglossia. … (Radford, 2010, p. 3)

Da tale brano emerge come Radford consideri essere *la consapevolezza* elemento chiave nella conquista della conoscenza, frutto delle visioni coagulate dagli allievi per sollecitazione dell'insegnante e da loro espresse in varie modalità.

3. Brevi considerazioni conclusive

Dall'esame globale degli studi sulla generalizzazione che abbiamo considerato, appaiono chiari elementi comuni circa l'articolazione delle fasi attraverso cui la generalizzazione emerge, ma ci sono anche alcuni elementi di differenza, per esempio la differente posizione dei processi di tentativi ed errori nei modelli di Radford e di Rivera circa i comportamenti degli studenti di fronte all'esplorazione di successioni figurali. Gli studi di Radford si distinguono per il fitto intreccio tra aspetti teorici e aspetti della pratica, ed inoltre per la considerazione della dimensione socio-culturale della matematica e del suo insegnamento.

Nella maggioranza degli studi che noi conosciamo, il ruolo dell'insegnante rimane nell'ombra. Warren (2006) afferma che occorre una maggiore ricerca per individuare azioni e modi di porre domande da parte degli insegnanti che possono facilitare le generalizzazioni degli studenti. Solo nei più recenti studi di Radford (2010, 2011) vengono evidenziate azioni degli insegnanti nel guidare gli studenti a 'vedere' analogie e differenze tra vari stage di un pattern. In tali studi tuttavia non si fa menzione del fatto che la maggior parte degli insegnanti incontrano grandi difficoltà ad affrontare questo tipo di insegnamento anche quando questi siano convinti dell'opportunità di praticarlo.

Il problema di una formazione degli insegnanti adeguata allo sviluppo nella classe di processi socio-costruttivi indirizzati alla generalizzazione ed alla modellizzazione algebrica è oggetto di nostri studi (Malara 2005, Malara 2008, Cusi & Al. 2011, Cusi & Malara 2012), esso si inquadra nel più generale problema, oggi molto dibattuto, della formazione degli insegnanti (si vedano ad esempio Even & Ball 2008, Wood 2008). In Italia purtroppo tale problema è ancora più serio e drammatico a causa delle riforme attuate nell'Università, che hanno portato alla progressiva riduzione nei corsi di laurea in matematica degli spazi offerti agli insegnamenti specifici per l'insegnamento, e per la chiusura delle scuole di specializzazione per l'insegnamento secondario.

Bibliografia

Blanton, M. e Kaput, J.J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In Cai, J. e Knuth, E. (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp.483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Carpenter, T. e Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. In Cick, E., Stacey, K, Vincent, Jl. e Vincent Jn. (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of algebra'* (vol. 1, pp. 155-162). Melbourne: University of Melbourne.

Carpenter, T.P., Franke, M.L. e Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D., Brizuela, B. e Schliemann, A. (2000). Bringing out the algebraic character of Arithmetic: instantiating variables in addition and subtraction,. In Nakahara,T. e Yoyama, M. (a cura di), *Proc. PME 24,* vol. 2, (145-152), Hiroshima: University of Hiroshima.

Carraher, D., Brizuela, B. e Darrell, E. (2001). The reification of additive differences in early algebra. In Cick, E., Stacey, K, Vincent, Jl. e Vincent Jn. (a cura di), *The future of the teaching and learning of algebra*, (pp.163-170), Melbourne: University of Melbourne

Cooper, T.J. e Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: models, representations and theory for teaching and learning. In Cai, J. e Knuth, E. (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Cusi, A. e Malara, N.A. (2008). Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences, *Quadrante,* vol. XVI, n.1, (pp. 57-80)

Cusi, A. e Malara, N.A. (2012). Educational processes to promote, among teachers and in the classes, a linguistic approach to algebra:

behaviours, difficulties and awareness emerged in teachers. In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L. e Robert, A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp.299-319). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cusi, A., Malara, N.A e Navarra G. (2011). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Promoting a Linguistic and Metacognitive Approach to the Teaching and Learning of Mathematics. In Cai J. and Knuth, E. (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Cusi, A. e Navarra, G. (2012). Aspects of generalization in early algebra. In Mai-Tatsis, B. and Tatsis, K. (a cura di), *Generalization in Mathematics at all educational levels*, Rzeszow: Rzeszow University press (pp. 182-192)

Dorfler, W. (1989). Protocols of actions as a cognitive tool for knowledge construction. In Artigue, M., Rogalski, J. e Vergnaud, G. (a cura di), *proc. PME 13*, vol. 1, (pp. 212-219), Paris.

Dorfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop, A. J. Mellin-Olsen, S. van Dormolen, J. (a cura di), *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching*, Kluver , 63-95

Dorfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections, *ZDM,* 40 (1), 143-160

Giovannini, A. (alias Enriques, F.) 1942, L'errore nelle matematiche, *Periodico di Matematiche*, serie IV, XXII, (pp. 57-65)

Ellis, A. (2007). A Taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations, *Journal of Learning Science*, 16:2, (pp. 221-262)

Even, R. e Ball, D. L. (2009). *The professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, Springer.

Ferrari, P.L. (2006). 'From verbal texts to symbolic expressions: A semiotic approach to early algebra'. In Novotná, J., H.Moraová, M.Krátká, N.Stehlíková (a cura di), *Proceedings of the 30^th^ Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Prague, vol.3, 73-80.

Fuji, T. e Stephens, M. (2001). Fostering understanding of algebraic generalization through numerical expressions: The role of quasi-variables. In H. Chick, K. Stacey, Jl. Vincent and Jn. Vincent (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of Algebra*', vol. 1 (pp. 258-264). Melbourne.

Harel, G. e Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic, *For the Learning of Mathematics*, *11*, 38-42

Hejny, M. (2003). Understanding and structure. In Mariotti, M. (a cura di), *proc. CERME 3*, Bellaria, WG3- (pp.1-8)

Kaput. J. (1995), A Research base supporting long term algebra reform?, proc. *PME 17-NA* Chapter, Columbus, OH, (pp. 2-26), Columbus: Ohio State University (ERIC n. ED389534)

Kaput J. e Blanton M.: 2001, Algebrafying the elementary mathematics experience: transforming task structures, in Chick, H., Stacey, K., Vincent Jl. and Vincent, Jn. (a cura di), *Proc. 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of Algebra*', vol. 1, (pp. 344-353), Melbourne: University of Melbourne

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In Alsina, C., Alvarez, J. Hodgson, B., Laborde, C. e Perez, A. (a cura di), *8th International Congress on Mathematics Education: Selected Lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Lee. L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In Bednardz, N. Kieran, C. e Lee, L. (a cura di), *Approaches to algebra*, (pp. 87-106), Dordrech: Kluver

Malara, N.A. (2005) Leading In-Service Teachers to Approach Early Algebra. In Santos, L. (a cura di) *"Mathematics Education: Paths and Crossroads"*, (pp. 285-304), Lisbona: Etigrafe

Malara, N.A. (2008). Methods and Tools to Promote in Teachers a Socio-constructive Approach To Mathematics Teaching. In Czarnocha, B. (a cura di), *Handbook of Mathematics Teaching Research* (pp. 273-286). Rzeszów University Press.

Mason, J. (1996a), Future for Arithmetic & Algebra: Exploiting Awreness of Generality. In Gimenez, J., Lins, R. e Gomez, B. (a cura di), *Arithmetics and Algebra Education, Searching for the future*, (pp. 16-33) Barcelona: Universitat Rovira y Virgili.

Mason, J. (1996b). Espressing generality and roots of algebra. In Bernardz, N., Kieran, K. e Lee, L. (a cura di), *Approaches to Algebra*, (pp. 65-86) Dordrecht: Kluver Academic Publisher.

Mason, J., Grahm, D, Pimm, D. e Gower, N. (1985). *Route to/roots of algebra*, Open University, Milton Keynes

Orton A. e Orton J. (1994). Students' perception and use of pattern and generalization. In Da Ponte, J. e Matos, J.F. (a cura di) *proc. PME 18*, vol.3. (pp. 407-414) Lisbon: University of Lisbon

Orton, J. e Orton, A. (2006), Making Sense of Children's patterning. In Puig, L. and Gutierrez, A. (a cura di), *proc. PME 20*, vol. 4 (pp. 83-90), Valencia: University of Valencia

Orton A. (a cura), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, (pp. 104-120), London: Continuum

Papadopoulos, I. e Iatridou, M. (2010), Modelling problem-solving situations into number theory tasks: the route towards generalisation, *Mathematics Education Research Journal,* Vol. 22, No. 3, 85-110

Radford, L. (1996). Some reflection on teaching algebra through generalization. In Bernardz, N., Kieran, K. e Lee, L. (a cura di), *Approaches to Algebra*, (pp. 107-111) Dordrecht: Kluver Academic Publisher.

Radford, L. (2003). gestures, speech, and the spouting of signs: a semiotic culturale approach to students' type of generalization, mathematical thinking and learning, *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (1), 37-70

Radford, L. (2006).Algebraic thinking and the generalization of paterns: a semiotic perspective. In Alatorre, S., Cirtina, J., Sáiz, M. e Méndez, A. (a cura di) *Proc. PME 28-NA* Chapter (vol.1 pp. 2-21). Mexico:UPN

Radford, L. (2008). Iconiciy and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different context. *ZDM*, 40 (1), 83-96

Radford, L. (2009). Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. and Arzarello, F. (a cura di), *proc. CERME 6*, Lyon, XXXIII – LIII:

Radford, L. (2010), The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities, *For the Learning of Mathematics* 30, 2 (pp. 2-7).

Radford, (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In Cai, J. e Knuth, E. (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp.483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Rivera, F. (2010) Visual Templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3) (pp. 297-328)

Rivera, F. e Rossi Becker, J. (2007), Abductive, inductive (generalization) strategies of preservice elementary majors on patterns in algebra, *Journal of Mathematical Behaviour*, 26(2) (pp.140-155)

Rivera, F. e Rossi Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 40(1), (pp. 65–82).

Rivera, F. e Rossi Becker, J. (2011), Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: results of a three-year study. In Cai, J. e Knuth, E. (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp.323-366). Advances in Mathematics Education: Springer.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W. e Brizuela, B.M. (2001), When tables become function tables. In van der Huenvel-Panhuizen. M. (a cura di), *Proc.. PME 25*, vol.4, (pp.145-152), Utrecht

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, (pp. 1 – 36)

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems, *Educational Studies in Mathematics*, 20, (pp. 147-164)

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalization in words and in symbols. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. and Stehlíková, N. (a cura di), *Proc. PME 30*, Vol. 5, (pp. 377-384). Prague.

Warren, E. e Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking, *Educational Studies in Mathematics*, 67 (pp. 171–185)

Wood, T. (a cura di), (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Voll. 1-4). Purdue University, West Lafayette, USA: Sense Publishers.

Zazkis, R. e Liljedal, P. (2002), Generalization of patterns: the tension between algebraix thinking and algebraic notation *Educational Studies in Mathematics* 49, (pp. 379–402)